75 EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA

Repaso Trigonometría elemental:

1. Completar en el cuaderno la siguiente tabla:

Grados	105º		225º		320º		35º
Radianes		$4\pi/9$ rad		$\pi/15$ rad		1 rad	

2. **Uso de la calculadora**:

a) Hallar, con cuatro cifras decimales bien aproximadas, el valor de las siguientes razones trigonométricas:

sen 35º   cos 70º   tg 53º   sen 26º 37'   cos 78º 34' 8''   tg 34º 12' 43''
sec 12º   cosec 23º   ctg 54º   sen 235º   cos 105º

b) Dadas las siguientes razones trigonométricas, hallar el ángulo agudo α del que proceden:

sen α=0,25   cos α=0,74   tg α=3   sec α=1,18   ctg α=1,5

c) Dado cos α=0,2, hallar, mediante calculadora, tg α, con cuatro decimales. *(Soluc: ≅4,8990)*

d) Dado sen α=0,56, hallar, mediante calculadora, cos α *(Soluc: ≅0,8285)*

e) Dada tg α=2, hallar, mediante calculadora, sen α *(Soluc: ≅0,8944)*

f) Dada cosec α=3, hallar, mediante calculadora, cos α *(Soluc: ≅0,9428)*

g) Dada sec α=1,5, hallar, mediante calculadora, tg α *(Soluc: ≅1,1180)*

h) Dada ctg α=3, hallar, mediante calculadora, cosec α *(Soluc: ≅3,1623)*

3. Resolver los siguientes **triángulos**, **rectángulos** en A, aplicando, siempre que sea posible relaciones trigonométricas (¡no el teorema de Pitágoras!); hallar también su área:

a) a=320 m, B=47º *(Soluc: C=43º; b≅234,03 m; c≅218,24 m; S_{ABC}≅25537,64 m^2)*

b) a=42,5 m, b=35,8 m *(Soluc: B≅57º23'22''; C≅32º36'38''; c≅22,90 m; S_{ABC}≅409,99 m^2)*

c) b=32,8 cm, B=22º *(Soluc: C=68º; a≅87,56 cm; c≅81,18 cm; S_{ABC}≅1331,40 cm^2)*

d) b=8 mm, c=6 mm *(Soluc: B≅53º7'48''; C≅36º52'12''; a=10 mm; S_{ABC}=24 mm^2)*

e) a=8 km, b=6 km *(Soluc: B≅48º35'; C≅41º 25'; c≅5,30 km; S_{ABC}≅15,87 km^2)*

f) a=13 m, c=5 m *(Soluc: B≅67º22'48''; C≅22º37'12''; b=12 m; S_{ABC}≅30 m^2)*

g) c=42,7 dam, C=31º *(Soluc: B=59º; a≅82,91 dam; b≅71,06 dam; S_{ABC}≅1517,23 dam^2)*

h) c=124 dm, B=67º 21' *(Soluc: C≅22º39'; a≅321,99 dm; b≅297,16 dm; S_{ABC}≅18423,9 dm^2)*

4. Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45º y si se apoya sobre la otra forma un ángulo de 30º. Hallar la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza sobre cada fachada?

(Soluc: anchura≅15,73 m; altura 7,07 y 5 m respectivamente)

Razones trigonométricas en cualquier cuadrante:

5. Expresar los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo positivo menor de 360º o 2π rad (hacer el dibujo en el caso de los cinco primeros):

a) 1100º **b)** 19π/3 rad **c)** 2970º **d)** –300º **e)** –1040º **f)** 10π rad **g)** 43π/4 rad
h) 3500º **i)** 32π/3 rad **j)** –2620º **k)** 63π/5 rad **l)** 43π/6 rad **m)** 4980º

(Soluc: a) 20º; b) π/3 rad; c) 90º; d) 60º, e) 40º; f) 0 rad; g) 3π/4 rad; h) 260º; i) 2π/3 rad; j)260º; k) 3π/5 rad; l) 7π/6 rad; m) 300º)

6. Sobre **papel milimetrado**, y para cada uno de los apartados que figuran a continuación, trazar una circunferencia de radio unidad (usar e indicar una escala conveniente), señalar en ella los ángulos en cuestión (utilizar para ello un transportador de ángulos) y trazar su seno y coseno, medir éstos aproximadamente, y comparar el resultado obtenido con la calculadora:

a) 30º y 150º **b)** 45º y 225º **c)** 90º, 180º y 270º **d)** 60º y 300º **e)** 0º, 60º y 120º

7. Utilizando la calculadora, construir una tabla de valores apropiada para representar, sobre **papel milimetrado**, las funciones sen x, cos x y tg x (Pueden verse dichas gráficas en el anexo final de este libro)

8. Sabiendo que cos α=–3/5 y 180º<α<270º, calcular las restantes razones trigonométricas mediante identidades trigonométricas (no usar decimales). Comprobar el resultado hallando α con la calculadora.
(Soluc: sen α=-4/5, tg α=4/3; α≅233º 7' 48'')

9. Sabiendo que tg α=–3/4 y α ∈ 4º cuadrante, calcular las restantes razones trigonométricas, y comprobar.
(Soluc: sen α=-3/5, cos α=4/5; α≅323º 7' 48'')

10. Ídem con sec α=2 y 0<α<π/2 *(Soluc: sen α=$\sqrt{3}$/2, cos α=1/2, tg α=$\sqrt{3}$; α=60º)*

11. Ídem con tg α=–3 y π/2<α<π *(Soluc: sen α=3$\sqrt{10}$/10, cos α=-$\sqrt{10}$/10)*

12. Ídem con cos α=0,2 y 3π/2<α<2π *(Soluc: sen α=-2$\sqrt{6}$/5, tg α=-2$\sqrt{6}$)*

13. Ídem con sen α=–0,3 y π<α<3π/2 *(Soluc: cos α≅-0,95, tg α≅0,31; α≅197º 27' 27'')*

14. Ídem con tg α=4/3 y π<α<3π/2 *(Soluc: sen α=-4/5, cos α=-3/5)*

15. Calcular las restantes razones trigonométricas sabiendo que:

a) cos α=4/5	270º<α<360º	**e)** sen α=1/4	α ∈ 1er cuad.	**i)** tg α=3/4	0º<α<90º
b) tg α=3/4	180º<α<270º	**f)** cos α=–1/3	α ∈ 2º cuad.	**j)** sec α=-$\sqrt{2}$	α ∈ 3er cuad.
c) sen α=3/5	90º<α<180º	**g)** cosec α=–2	180º<α<270º	**k)** cosec α=$\sqrt{5}$	α ∈ 2º cuad.
d) ctg α=–2	90º<α<180º	**h)** sec α=1	0º<α<90º		

(Soluc: b) sen α=-3/5, cos α=-4/5; d) sen α=$\sqrt{5}$/5, cos α=-2$\sqrt{5}$/5, g) sen α=-1/2, cos α=-$\sqrt{3}$/2; k) sen α=-$\sqrt{2}$/2, tg α=1; l) sen α=$\sqrt{5}$/5, cos α=-2$\sqrt{5}$/5)

16. Determinar los valores de sen α y tg α sabiendo que tg $\alpha > 0$ y cos α=−5/12

17. Encontrar el ángulo α y las demás razones trigonométricas sabiendo que sen α=1/2 y cos α=$-\sqrt{3}/2$

18. Resolver las siguientes **ecuaciones trigonométricas** sencillas:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ **b)** $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\operatorname{tg} x = 1$ **d)** $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** $\cos x = \frac{1}{2}$ **f)** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Reducción al 1er cuadrante:

19. Hallar, **sin calculadora**: **a)** sen 570º **b)** cos 14520º **c)** sen (−120º) **d)** cos (−240º)
e) tg 2565º **f)** cos 15π/2 rad **g)** sen 55π/6 rad **h)** tg 79π rad

(Soluc: a) -1/2; b) -1/2; c) $-\sqrt{3}/2$; d) -1/2; e) 1; f) 0; g) -1/2; h) 0)

20. Ídem: **a)** cos 225º **b)** cos(−60º) **c)** tg 120º **d)** sen (−1470º) **e)** tg 900º
f) sen 19π/6 rad **g)** cos 11π rad **h)** cos(−1950º) **i)** tg 29π/4 rad **j)** sen 11π/4 rad
k) tg 22π/3 rad

(Soluc: a) $-\sqrt{2}/2$; b)1/2; c) $-\sqrt{3}$; d) -1/2; e) 0; f) -1/2; g) -1; h) $-\sqrt{3}/2$; i) 1; j) -1; k) $\sqrt{3}$)

21. Expresar las siguientes razones en función de la de un ángulo del 1er cuadrante:
a) sen 1485º **b)** cos 1560º **c)** sen 1000º *(Soluc: sen 45º; -cos 60º; -sen 80º)*

22. Ídem: **a)** sen 1300º **b)** cos (−690º) **c)** tg 170º **d)** sen (−1755º) **e)** sen (−120º) **f)** ctg (−150º)
g) sen 2700º **h)** sec (−25º) **i)** cos (−30º) **j)** cosec 4420º

(Soluc: a) -sen40º; b)cos30º; c) -tg10º; d) sen45º; e) -sen60º; f) ctg30º; g) 0; h) sec25º; i) cos30º; j) cosec80º)

23. Expresar seno, coseno y tangente de 1755º en función de un ángulo del 1er cuadrante. Comprobar el resultado con la calculadora.

Razones trigonométricas de adición y sustracción:

24. a) Hallar mediante las fórmulas trigonométricas correspondientes (sin calculadora, y sin utilizar decimales) el seno, coseno y tangente de 75º.

b) Utilizando los resultados anteriores, calcular, de la forma más rápida posible, (sin calculadora y sin utilizar decimales) el seno y la tangente de los siguientes ángulos:

i) 105º **ii)** 165º **iii)** 15º **iv)** 195º **v)** 135º

(Comprobar todos los resultados con la calculadora)

25. Si sen x=12/13 y sen y=4/5, siendo x e y $\in$ 1er cuadrante, calcular:

a) sen (x+y) **b)** sen (x−y) **c)** cos (x+y) **d)** cos (x−y)

(Soluc: a) 56/65; b) 16/65; c) -33/65; d) 63/65)

26. Si tg a=3/4, hallar tg (a+30º) y tg (45º−a) *(Soluc: $\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$; $\frac{1}{7}$)*

27. Hallar el seno y el coseno de 9º y 6º en función de cos 36º

28. Hallar, sin calculadora, $\frac{8\,\mathrm{sen}105^\circ}{\mathrm{sen}45^\circ}$ *(Soluc: 4+4$\sqrt{3}$)*

Razones trigonométricas de -α, 180-α, 180+α, etc:

29. Expresar únicamente en función de las razones trigonométricas de α:

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ **b)** $\cos\left(\alpha-\frac{9\pi}{2}\right)$ **c)** $\mathrm{tg}(\alpha+5\pi)$ **d)** $\mathrm{sen}\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)$ **e)** $\mathrm{tg}(360^\circ-\alpha)$

(Soluc: a) sen α; b) sen α; c) tg α; d) -cos α; e) -tg α)

30. Simplificar las siguientes expresiones: **a)** tg(α+180º)+tg(α-180º)+tg(α-270º)+tg(360º-α)

b) sen(α+5π)+sen(α-π)+sen(α+2π)+sen(α+π)

(Soluc: a) tg α - ctg α; b) -2 sen α)

31. Calcular sen (5π-x) sabiendo que cos x=0,5 y x∈4º cuad. *(Soluc: -$\sqrt{3}$/2)*

32. Siendo tg x=2/3 calcular: **a)** $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ **b)** $\mathrm{tg}(\pi-x)$ **c)** $\mathrm{tg}(\pi+x)$ *(Soluc: 3/2; -2/3; 2/3)*

33. Sabiendo que tg a=3/2 calcular: **a)** $\cos(\pi+a)$ **b)** $\cos(2\pi-a)$ **c)** $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ **d)** $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$

(Soluc: a) $-2\sqrt{13}/13$; b) $2\sqrt{13}/13$; c) $2\sqrt{13}/13$; d) $2\sqrt{13}/13$)

Razones trigonométricas del ángulo doble:

34. Calcular el seno y el coseno de 20º en función de sen 10º, y comprobar el resultado con la calculadora.

35. Hallar sen 2x, cos 2x y tg 2x, siendo x ∈ 1^er^ cuadrante, en cada uno de los siguientes casos:

a) sen x=1/2 **b)** cos x=3/5 **c)** sen x=5/13

(Soluc: a) $\sqrt{3}/2$; 1/2; $\sqrt{3}$ b) 24/25; -7/25; -24/7 c) 120/169; 119/169; 120/119)

36. Dado a ∈ 3^er^ cuadrante tal que $\mathrm{tg}\,a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, hallar las razones trigonométricas del ángulo **2a**.

(Soluc: sen 2a=$\sqrt{3}$/2; cos 2a=1/2)

36b Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo **a** del ejercicio anterior.
(Soluc: a=210º)

37. Expresar sen 3a y cos 3a en función de sen a y cos a respectivamente

(Soluc: sen 3a=3sen a-4sen^{3}a; cos 3a=4cos^{3}a-3cos a)

38. Si cos α=1/5 y α ∈ 1^er^ cuadrante, calcular las razones trigonométricas del ángulo 90º-2α

(Soluc: -23/25; 4$\sqrt{6}$/25)

39. Si ctg α=4/3, hallar cos 2α *(Soluc: 7/25)*

40. Dada $\text{tg}\, a=\sqrt{3}$ y a$\in$3^er^ cuadrante, hallar las razones de 2a. *(Soluc: sen 2a=$\sqrt{3}$/2; cos 2a=-1/2)*

40b. Hallar el ángulo **a** del ejercicio anterior y comprobar, sin calculadora, el resultado anterior. *(Soluc: a=240º)*

41. Sabiendo que $\text{tg}\, 2a=\sqrt{3}$, hallar sen a y cos a, sabiendo que a<90º. ¿De qué ángulo **a** se trata?

(Soluc: sen a=1/2; cosa=$\sqrt{3}$/2; a=30º)

Razones trigonométricas del ángulo mitad:

42. Calcular tg π/8 *(Soluc: $\sqrt{2}$ -1)*

43. Dado $\alpha \in$ 4º cuadrante tal que sec α=2, hallar cos α/2 $\left(Soluc:\ \cos\frac{a}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

43b. Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo α del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) el resultado anterior. *(Soluc: α=300º)*

44. Sea un ángulo **a** situado en el 2º cuadrante tal que tg a=–3/4. Hallar las razones trigonométricas del ángulo **a/2**. $\left(Soluc:\ sen\frac{a}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10};\ \cos\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

44b. Comprobar con la calculadora el resultado del ejercicio anterior. *(Soluc: a≅143º 7' 48'')*

45. Dado **a** $\in$ 3^er^ cuadrante tal que sen a=–1/2, hallar las razones de **a/2**. ¿De qué ángulo a se trata?

$$\left(Soluc:\ sen\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};\ \cos\frac{a}{2}=\frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};\ a=210^{o}\right)$$

46. Volver a hacer el ejercicio 41, pero aplicando las fórmulas del ángulo mitad (Ayuda: para ello, plantear el cambio de variable a=α/2).

47. Dado a $\in$ 4º cuadrante con $\text{tg}\, a=-\sqrt{3}$, hallar las razones de a/2 $\left(Soluc:\ sen\frac{a}{2}=\frac{1}{2};\ \cos\frac{a}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

47b. Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo **a** del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) los resultados anteriores. *(Soluc: a=300º)*

48. Dado $\alpha \in$ 3^er^ cuadrante tal que cos α=–1/2, hallar, utilizando la fórmula correspondiente (resultados simplificados y racionalizados; no vale utilizar decimales), y **por este orden**:

a) sen 2α *(Soluc: $\sqrt{3}$/2)*

b) cos α/2 *(Soluc: –1/2)*

c) sen (α–30º) *(Soluc: –1/2)*

d) tg (α+60º) *(Soluc: –$\sqrt{3}$)*

e) Razonar mediante la circunferencia goniométrica (no vale con calculadora) de qué α se trata. *(Soluc: 240º)*

49. Ídem, dado $\alpha \in$ 4º cuadrante tal que $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$

a) cos (α+30º) *(Soluc: √3/2)*

b) tg (α−45º) *(Soluc: 2+√3)*

c) sen (α+1650º) *(Soluc: 1/2)*

d) sen α/2 *(Soluc: 1/2)*

e) cos 2α *(Soluc: −1/2)*

f) Razonar (sin calculadora) de qué α se trata. *(Soluc: 300º)*

50. Ídem con $\alpha \in$ 3$^{\underline{er}}$ cuadrante tal que $\sec\alpha=-3$

a) sen (α −60º) *(Soluc: (√3−2√2)/6)*

b) tg (α+45º) *(Soluc: -(9+4√2)/7)*

c) cos (α −2640º) *(Soluc: (1−2√6)/6)*

d) cos α/2 *(Soluc: −√3/3)*

e) sen 2α *(Soluc: 4√2/9)*

f) Razonar, mediante calculadora y circunferencia trigonométrica, de qué α se trata. *(Soluc: ≅250º 31' 44'')*

51. Dado $\alpha \in$ 4º cuadrante tal que $\operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{3}/2$ hallar, **mediante las correspondientes fórmulas trigonométricas** (resultados racionalizados y simplificados; no vale usar decimales):

a) $\cos\alpha/2$ *(Soluc: −√3/2)*

b) $\operatorname{sen}(1200º-2\alpha)$ *(Soluc: −√3/2)*

52. Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y que $\pi\le\alpha\le 3\pi/2$, hallar **mediante identidades fórmulas trigonométricas** (resultados racionalizados y simplificados; no usar decimales):

a) $\operatorname{sen}\alpha/2$ $\left(Soluc: \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$

b) $\cos(2\alpha+930º)$ $(Soluc: 0)$

Transformación de sumas en productos:

53. Transformar en producto y calcular (comprobar con la calculadora):

a) sen 75º − sen 15º **b)** cos 75º + cos 15º **c)** cos 75º − cos 15º $\left(Soluc: \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{6}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Identidades trigonométricas:

54. Simplificar:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}4\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 2\alpha}$ *(Soluc: tg 3α)*

b) $\dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$ *(Soluc: 2 ctgα)*

c) $\dfrac{2\cos(45º+\alpha)\cos(45º-\alpha)}{\cos 2\alpha}$ *(Soluc: 1)*

d) $2\operatorname{tg}x\cos^2\dfrac{x}{2}-\operatorname{sen}x$ *(Soluc: tg x)*

e) $2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}\alpha$ *(Soluc: tg α)*

f) $\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}$ *(Soluc: ctg a)*

g) $\dfrac{1+\text{ctg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}{\text{ctg}\alpha-\text{tg}\beta}$ *[Soluc: tg(α+β)]*

h) $\dfrac{1-\ \text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\ \text{tg}^2\frac{x}{2}}$ *(Soluc: cos x)*

55. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\text{sen}^2\ \alpha+\cos 2\alpha}=2\,\text{tg}^2\alpha$

b) sen 2α cos α **–** sen α cos 2α = sen α

c) cos α cos (α–β) + sen α sen (α–β)=cos β

d) $\text{sen}\ \alpha+\cos\ \alpha=\sqrt{2}\ \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

e) $\sec^2 A-\text{tg}^2 A=1$

f) $\text{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{\text{sen}A}{1+\cos A}=\dfrac{1-\cos A}{\text{sen}A}=\text{cosec}A-\text{ctg}A$

g) $\dfrac{2\ \text{sen}\ \alpha\ -\text{sen}\ 2\alpha}{2\ \text{sen}\ \alpha\ +\text{sen}\ 2\alpha}=\dfrac{1-\cos\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}=\text{tg}^2\ \dfrac{\alpha}{2}$

h) $\text{sen}^2\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}-\text{sen}^2\ \dfrac{\alpha-\beta}{2}=\text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$

i) $\text{sen}^2 A=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2A$

j) $\dfrac{2\,\text{sen}\,x}{\text{tg}\,2x}=\cos x-\text{sen}\,x\cdot\text{tg}\,x$

k) $\dfrac{2\,\text{tg}\ \frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\ \frac{x}{2}}=\text{sen}\ x$

l) $\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\,x}{1-\text{sen}\,x}}=\sec x+\text{tg}\,x$

m) $\dfrac{\cos 2x-1}{\cos 2x+1}=\text{tg}^2 x$

56. Demostrar las siguientes fórmulas, llamadas **transformaciones de productos en sumas**:

$$\text{sen}\,x\ \text{sen}\,y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\cos x\ \cos y=\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\text{sen}\,x\ \cos y=\frac{\text{sen}(x-y)+\text{sen}(x+y)}{2}$$

Ecuaciones trigonométricas:

57. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas elementales:

a) $\text{sen}\,x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *(Sol: x=60º+k·360º; x=120º+k·360º)*

b) $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *(Sol: x=135º+k·360º; x=225º+k·360º)*

c) $\text{ctg}\,x=-\sqrt{3}$ *(Sol: x=150º+k·180º)*

d) $\text{sen}\,x=\dfrac{1}{3}$ *(x≅19º28'16''+k·360º; x≅160º31'44''+k·360º)*

e) $\cos x=-\dfrac{4}{5}$ *(x≅143º7'48''+k·360º; x≅216º52'12''+k·360º)*

f) $\text{sen}\,x=0$ *(Sol: x=k·180º)*

g) $\cos x=-1$ *(Sol: x=(2k+1)·180º)*

h) $\text{cosec}\ x=-2$ *(Sol: x=210º+k·360º; x=330º+k·360º)*

i) $\sec\ x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ *(Sol: x=150º+k·360º; x=210º+k·360º)*

j) $\text{tg}\,x=\sqrt{3}$ *(Sol: x=60º+k·180º)*

k) $\text{cosec}\ x=\dfrac{1}{2}$ *(Sol: ∄ soluc)*

l) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ *(Sol: Se verifica $\forall x \in \mathbb{R}$)*

m) $\cos 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *(Sol: x=10º+k·120º; x=110º+k·120º)*

n) $\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *[Sol: x=2kπ; x=(4k+1)·π/2]*

58. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas más elaboradas:

a) $\text{sen}\, x + \cos x = \sqrt{2}$ *(Sol: x=45º+k·360º)*

b) $\text{sen}\, x - 2\cos 2x = -\dfrac{1}{2}$

(Sol: 30º, 150º, ≅311º24'35'' y ≅228º35'25'')

c) $\text{sen}\, x \cos x = \dfrac{1}{2}$ *(Sol: x=45º+k·180º)*

d) sen 2x=cos x

(Sol: x=30º+k·360º; x=150º+k·360º; x=90º+k·180º)

e) $\sqrt{3}\ \text{sen}\, x + \cos x = 1$ *(Sol: x=k·360º; x=120º+k·360º)*

f) $2\cos^2 x - \text{sen}^2 x + 1 = 0$ *(Sol: x=90º+k·180º)*

g) $\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x = 0$ *(Sol: x=k·180º; x=90º+k·360º)*

h) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$

(Sol: x=90º+k·180º; x=30º+k·360º; x=330º+k·360º)

i) $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$ *(Sol: x=90º+k·180º)*

j) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 0$ *(Sol: x=45º+k·90º)*

k) $2\cos^2 x + \text{sen}\, x = 1$

(Sol: x=90º+k·360º; x=210º+k·360º; x=330º+k·360º)

l) $3\,\text{tg}^2 x - \sqrt{3}\ \text{tg}\, x = 0$

(Sol: x=k·180º; x=30º+k·360º; x=210º+k·360º)

m) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\ \text{sen}\, x = 0$ *(Sol: x=π/4+k·π)*

n) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1}{2}$

(Sol: x=60º+k·360º; x=300º+k·360º)

o) $\text{sen}2x - 2\cos^2 x = 0$ *(Sol: x=90º+k·180º; x=45º+k·180º)*

p) cos2x−3senx+1=0 *(Sol: x=30º+k·360º; x=150º+k·360º)*

q) $4\,\text{sen}^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$ *(Sol: x=k·180º; x=45º+k·90º)*

r) $4\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x \cos x - 3\cos^2 x = 0$

(Sol: x=36º52'11,6''+k·180º; x=135º+k·180º)

s) $\cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos x = \dfrac{1}{2}$ *(Sol: x=90º+k·180º)*

t) $\text{tg}^2 \dfrac{x}{2} + 1 = \cos x$ *(Sol: x=k·360º)*

u) $2\,\text{sen}^2 \dfrac{x}{2} + \cos 2x = 0$

(Sol: x=90º+k·180º; x=60º+k·360º; x=300º+k·360º)

v) cos2x+3senx=2

w) tg2x tgx=1

x) $\cos x \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$

y) 2sen x=tg 2x

z) $\sqrt{3}\ \text{sen}\dfrac{x}{2} + \cos x = 1$

α) $\text{sen}2x \cos x = 6\,\text{sen}^3 x$

β) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + \text{tg}\, x = 1$

γ) $\text{sen}\, x - \sqrt{3}\cos x = 2$ *(Sol: x=150º+k·360º)*

59. Resolver las siguientes ecuaciones, transformando las sumas y diferencias en productos:

a) sen3x−senx=cos2x

b) $\dfrac{\text{sen}\, 5x + \text{sen}\, 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$

c) $\dfrac{\text{sen}\, 3x + \text{sen}\, x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$

d) sen3x−cos3x=senx−cosx

Resolución de triángulos oblicuángulos:

60. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con * se indica el caso dudoso):

a) a=6 m, B=45º, C=105º *(Soluc: A=30º, b≅8,49 m, c≅11,59 m, S_{ABC} ≅24,60 m^2)*

b) a=10 dam, b=7 dam, C=30º *(Soluc: c≅5,27 dam, B≅41º 38', A≅108º 22')*

c) b=35,42 dm, A=49º 38', B=70º 21' *(Soluc: C=60º 1', a≅28,66 dm, c≅32,58 dm, S_{ABC} ≅439,94 dm^2)*

d) a=13 m, b=14 m, c=15 m *(Soluc: A≅53º 7' 48'', B≅59º 29' 23'', C≅67º 22' 48'', S_{ABC} ≅84m^2)*

* **e)** a=42, b=32, B=40º 32' *(Soluc: A_1≅58º 32', C_1≅80º 56', c_1≅48,62; S_{ABC} ≅663,55*
A_2≅121º 27', C_2≅18º, c_2≅15,22; S_{ABC} ≅207,72)

f) a=15, b=22, c=17 *(Soluc: A≅42º 54', B≅86º 38', C≅50º 28')*

g) a=10 mm, b=7 mm, C=60º *(Soluc: c≅8,89 mm, A≅76º 59' 46'', B≅43º 0' 14'', S_{ABC} ≅30,31mm^2)*

h) a=10, b=9, c=7 *(Soluc: A≅76º 13', B≅60º 57, C≅42º 50')*

* **i)** a=60 cm, b=40 cm, A=42º *(Soluc: B≅26º 30', c≅83,43 cm, C≅111º 30', S_{ABC} ≅116,5 cm^2)*

* **j)** a=40 cm, b=60 cm, A=72º *(Soluc: ∄ soluc)*

* **k)** a=50, b=60, A=42º *(Soluc: B_1≅53º 25', C_1≅84º 35', c_1≅74,39*
B_2≅126º 35', C_2≅11º 25', c_2≅14,39)

l) A=30º, B=45º, b=$\sqrt{2}$ m *(Soluc: C=105º, a=1 m, c≅1,93 m, S_{ABC} ≅0,68 m^2)*

m) b=3 hm, c=2 hm, A=60º *(Soluc: a=$\sqrt{7}$ hm, B≅79º, C≅40º 54', S_{ABC} =3$\sqrt{3}$ /2 hm^2)*

n) A=30º, b=$\sqrt{3}$, c=1

* **o)** a=4, b=5, B=30º

p) a=1792, b=4231, c=3164

* **q)** a=12 hm, b=57 hm, A=150º *(Soluc: ∄ soluc)*

r) a=72, b=57, C=75º 47'

s) c=3,78, A=105º, B=38º 47'

* **t)** a=40, b=60, A=12º

* **u)** a=60, b=40, A=82º

v) a=8 m, B=30º, C=105º *(Soluc: b≅5,66 m, c≅10,93 m, S_{ABC} ≅21,86 m^2)*

w) A=60º, B=75º, c=$\sqrt{2}$ m

x) a=4 km, B=45º, C=60º

y) a=4 mm, b=3 mm, c=6 mm

z) a=1 cm, c=2 cm, B=60º

α) a=5 dam, b=3 dam, c=4 dam

* **β)** b=10 dm, c=9 dm, C=45º

γ) A=30º, b=10 m, C=75º *(Soluc: B=75º, a≅5,18 m, c=10 m, S_{ABC}=25 m^2)*

61. Resolver el triángulo ABC sabiendo que su perímetro es 24 cm, es rectángulo en A y sen B=3/5
(Soluc: a=10 cm, b=6 cm, c=8 cm)

62. Calcular el área de un triángulo de datos a=8 m, B=30º, C=45º

63. En un paralelogramo ABCD el lado AB mide 6 cm, el AD 8 cm, y el ángulo A=30º. Hallar sus diagonales.

64. Hallar los lados de un triángulo sabiendo que su área mide 18 cm^2 y dos de sus ángulos A=30º y B=45º
(Soluc: a≅5,13 cm, b≅7,26 cm, c≅9,92 cm)

65. TEORÍA: Demostrar, utilizando el teorema del coseno, que el triángulo de lados 9, 12 y 15 es rectángulo.

*** 66.** Uno de los lados de un triángulo es doble que el otro, y el ángulo comprendido vale 60º. Hallar los otros dos ángulos. *(Soluc: 30º y 60º)*

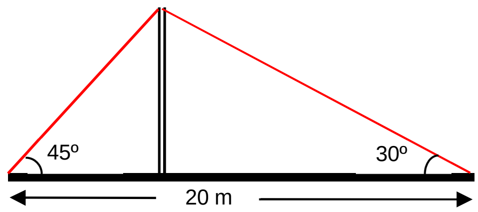
Problemas de planteamiento:

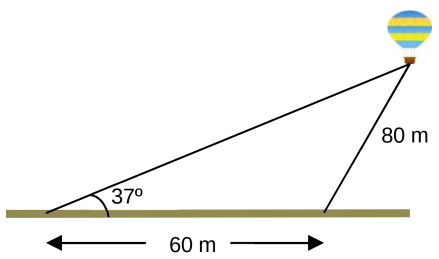
67. Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser 30º. A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora 45º. Calcular la altura de la montaña. *(Soluc: ≅136,60 m)*

68. Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de 20º y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de 120º. ¿Cuál es la anchura del río? *(Soluc: ≅53,21 m)*

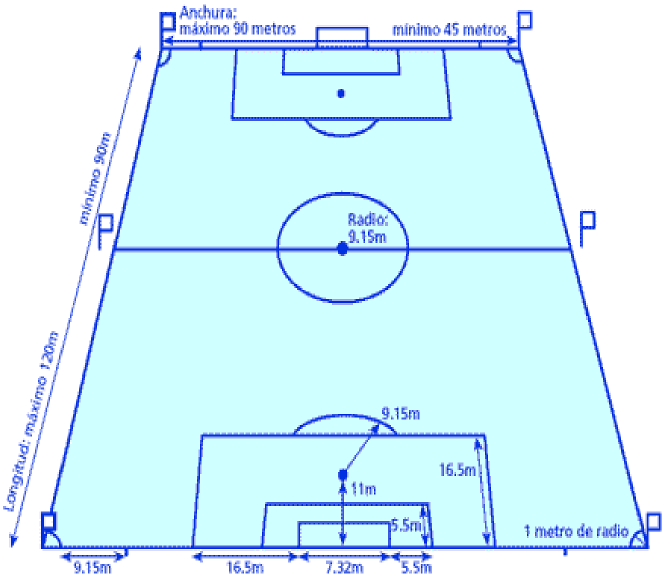
69. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120º. ¿Cuánto distan A y C? *(Soluc: ≅13 km 77 m)*

70. Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil? *(Sol: cable=25 m; mástil≅7,32 m)*





71. Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37º. Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso. *(Sol: ≅71,80 m y 119,31 m, respectivamente)*



72. Se lanza una falta desde un punto situado a 25 m y 28 m de ambos postes de una portería reglamentaria de fútbol, es decir, 7,32 m de longitud ¿Bajo qué ángulo se verá la portería desde dicho punto? (Hacer un dibujo previo que explique la situación). ¿A qué distancia se encuentra del centro de la portería? *(Sol: ≅ 14º 29' 54'')*

Si el punto estuviera a 26 y 27 m, ¿tendría más ángulo de tiro? La distancia, ¿sería menor?

73. Desde la puerta de una casa, A, se ve el cine B, que está a 120 m, y el quiosco C, que está a 85 m, bajo un ángulo $B\hat{A}C=40º$ ¿Qué distancia hay entre el cine y el quiosco? (Hacer un dibujo previo que explique la situación). *(Sol: ≅77,44 m)*

74. Dos barcos salen simultáneamente de un puerto con rumbos que forman un ángulo de 82º. El primero navega a 18 millas por hora, y el segundo a 25 millas por hora. Si mantienen inalterados los rumbos, ¿cuánto distarán entre sí al cabo de 3 horas? *(Soluc: ≅86,10 millas)*

75. TEORÍA: En la explicación del tema hay dos fórmulas cuya demostración no ha sido hecha. Se trata del seno de la suma de ángulos:

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

y de la fórmula de Herón, para hallar el área de un triángulo:

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$, donde **s** es el semiperímetro, i.e. $\mathbf{s}=\dfrac{a+b+c}{2}$

Buscar una demostración en Internet, y pasarla al cuaderno, procurando entenderla.